

院生融合プロジェクト

メッシュフリー法が拓く
地球物理学・防災工学のボーダーフリー
次世代地震・津波シミュレータ

菖蒲迫 健介
(九州大学 理学府)

藤岡 秀二郎
(九州大学・工学府)

背景 > 課題 > 手法開発 > 検証①②③ > 妥当性確認 > まとめと今後

地震災害 頻発化&甚大化



2011年東北地方太平洋沖地震
岩手県宮古市HP



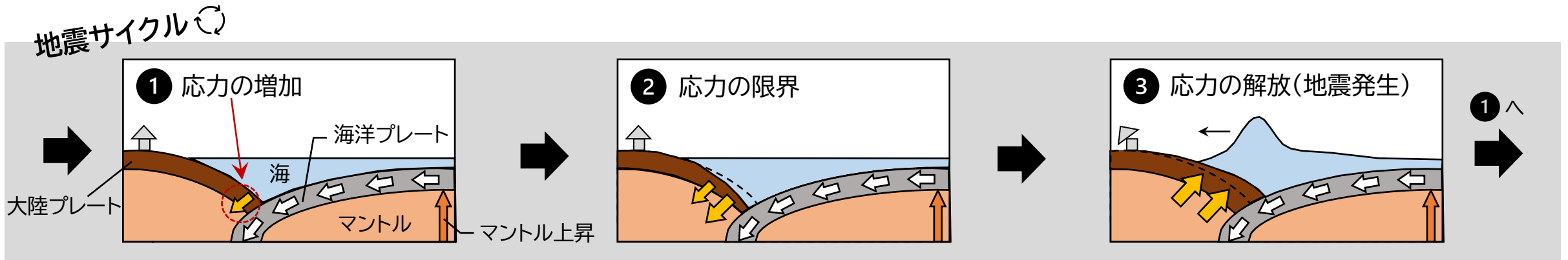
令和6年能登半島地震
石川県HP



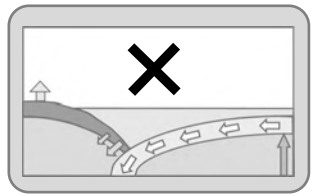
南海トラフ地震など未曾有の地震・津波被害のリスクヘッジが必要

背景 > 課題 > 手法開発 > 検証①②③ > 妥当性確認 > まとめと今後

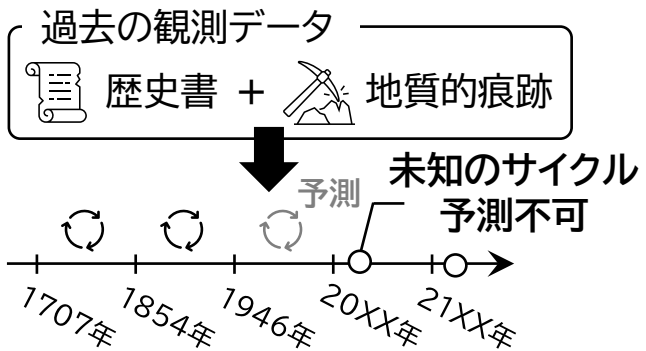
巨大地震・津波は海洋プレートの沈み込み現象に起因



従来の地震サイクル予測



数値計算が困難

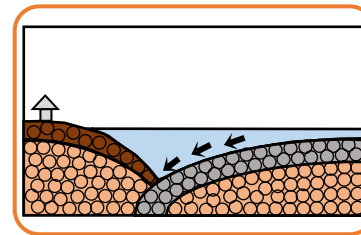


過去のデータから地震シナリオを作成
(未知のシナリオ・規模の予測不可)

防災工学
×
地球物理学

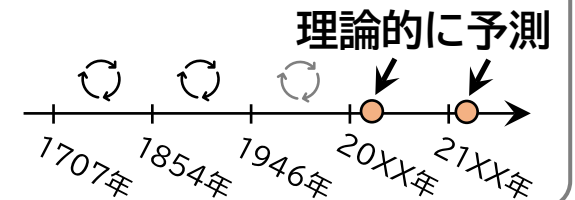


本研究: プレートの沈み込み計算を実現



粒子法による計算

未知の巨大地震・津波
を理論的に予測

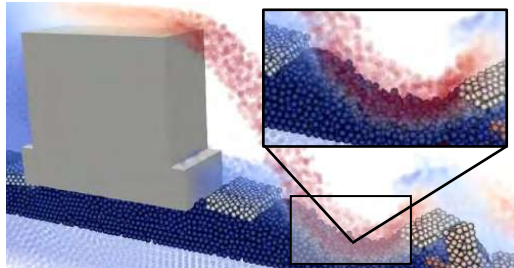


地震シナリオをシミュレーションにより予測
(未知の巨大地震・津波を理論的に予測)

背景 > 課題 > 手法開発 > 検証①②③ > 妥当性確認 > まとめと今後

なぜ粒子法？

① 自由表面の取り扱いが容易



粒子法
↓
精確に表現可

② 粘弾性体の取り扱いが容易

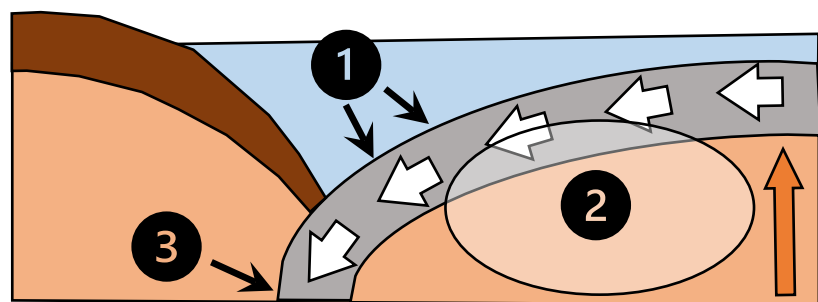
従来法【格子法】
応力
大変形を扱えない

本研究【粒子法】
大変形を扱える

③ 境界条件の自明性

従来法
地球内部と非連動

本研究
マントル対流を考慮



① ② ③ の解決
➡➡➡

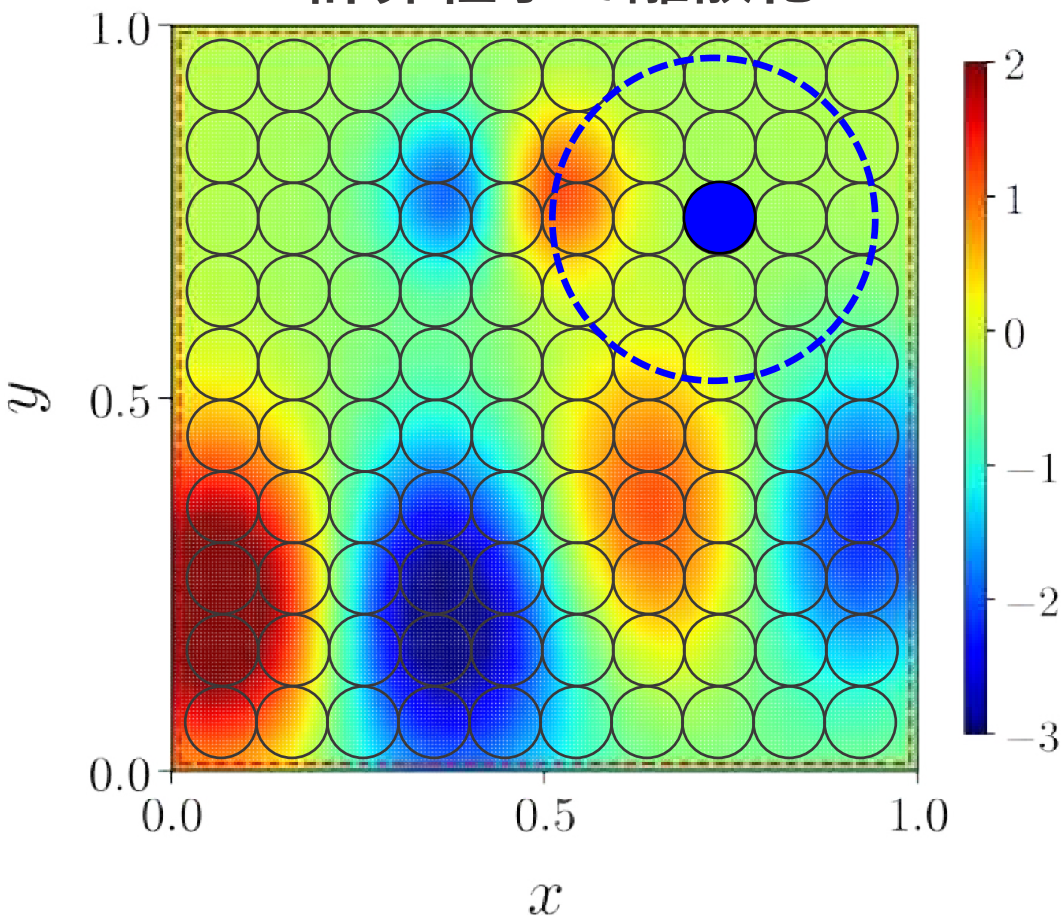
粒子法を基盤とする先駆的シミュレーション手法の開発

粒子法は従来法と比べ 精度 **×** → **本研究の目的：粒子法の高精度化**

Smoothed Particle Hydrodynamics method

Gingold & Monaghan (1977); Lucy (1977)

計算粒子で離散化



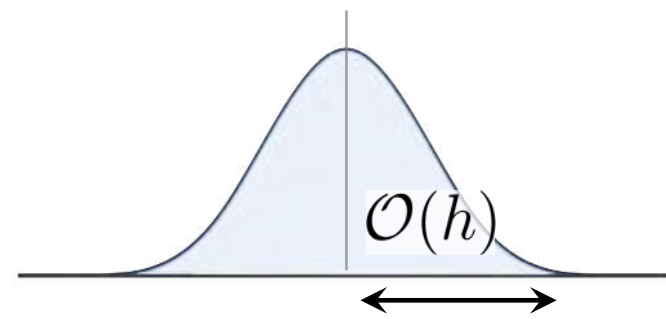
運動量保存の式

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} - \rho \mathbf{g}$$

空間微分の離散化を
どのように扱うか？

Taylor 展開

$$f(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}_i) + \nabla f(\mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + R_2$$



重み付き積分

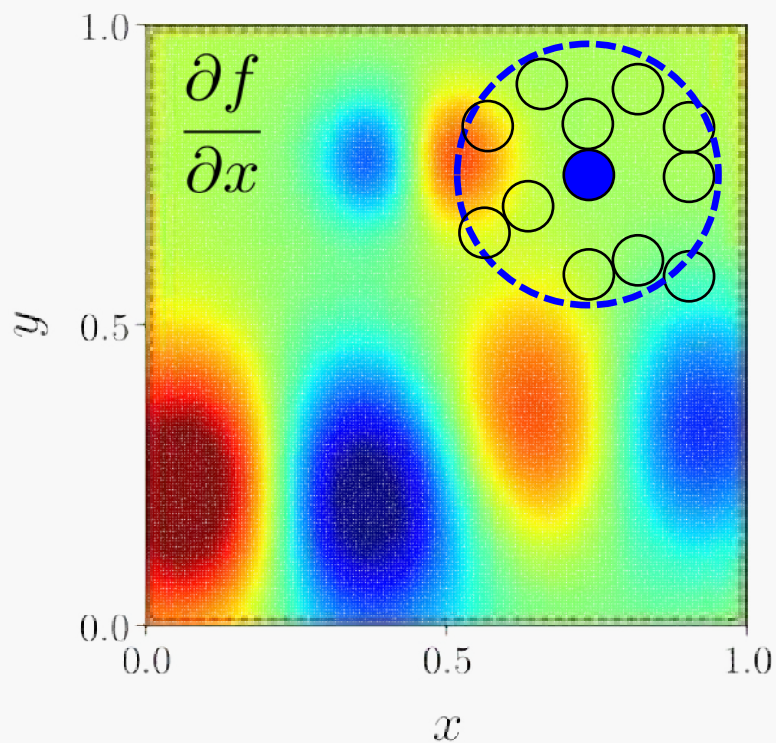
$$\nabla f(\mathbf{x}_i) = \sum_j^N f(\mathbf{x}_j) \nabla W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|; h) V_j + \mathcal{O}(h^2)$$

粒子配置に乱れが生じると空間離散精度が悪化する

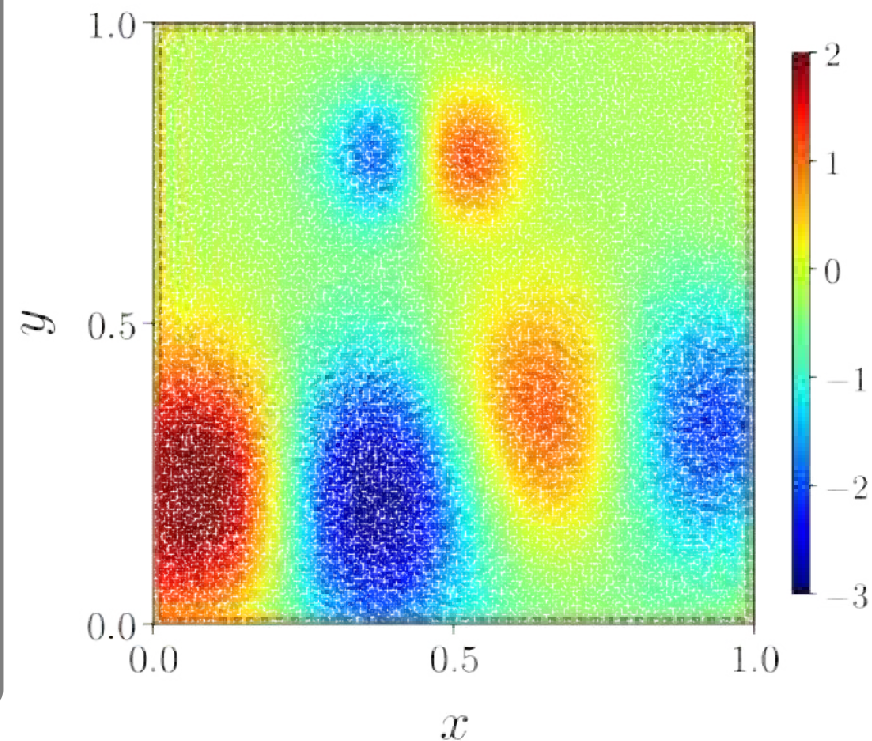
e.g., Basic et al. (2017), Asai et al. (2023)

Franke's function [Franke, 1979]

$$f(x, y) = \frac{3}{4} \exp \left[-\frac{(9x-2)^2}{4} - \frac{(9y-2)^2}{4} \right] + \frac{3}{4} \exp \left[-\frac{(9x+1)^2}{49} - \frac{(9y+1)^2}{10} \right] + \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{(9x-7)^2}{4} - \frac{(9y-3)^2}{4} \right] - \frac{1}{5} \exp \left[-(9x-4)^2 - (9y-7)^2 \right]$$

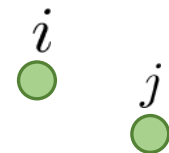


配置に乱れがある場合

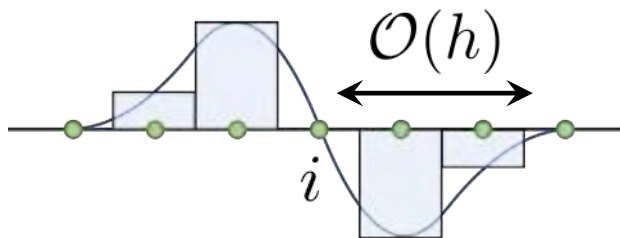


Taylor 展開

$$f(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}_i) + \nabla f(\mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) + R_2$$



$\nabla W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|; h) =: \nabla W_{ij}$ を掛けて空間積分
 V_j (粒子体積) を掛けて和を取る



$$\sum_j^N f(\mathbf{x}_j) \nabla W_{ij} V_j = f(\mathbf{x}_i) \sum_j^N \nabla W_{ij} V_j + \nabla f(\mathbf{x}_i) \cdot \left[\sum_j^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \nabla W_{ij} V_j \right] + \left[\sum_j^N R_2 \nabla W_{ij} V_j \right]$$

$\sim \mathcal{O}(h^0)$ $\sim \mathcal{O}(h^1)$
= 単位行列 = 0

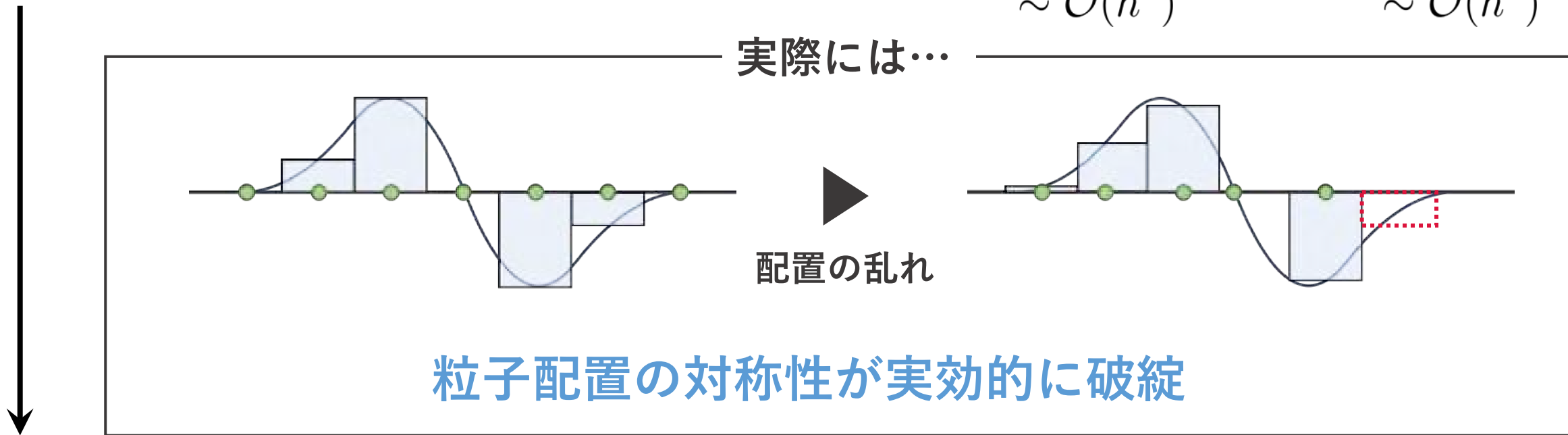
粒子配置の対称性 + 重み関数の規格化性

$$\nabla f(\mathbf{x}_i) = \sum_j^N \left(f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i) \right) \nabla W_{ij} V_j + \mathcal{O}(h^2)$$

背景 > 課題 > 手法開発 > 検証①②③ > 妥当性確認 > まとめと今後

$$\sum_j^N f(\mathbf{x}_j) \nabla W_{ij} V_j = f(\mathbf{x}_i) \sum_j^N \nabla W_{ij} V_j + \nabla f(\mathbf{x}_i) \cdot \left[\sum_j^N (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \nabla W_{ij} V_j \right] + \left[\sum_j^N R_2 \nabla W_{ij} V_j \right]$$

$\sim \mathcal{O}(h^0)$
 $\sim \mathcal{O}(h^1)$



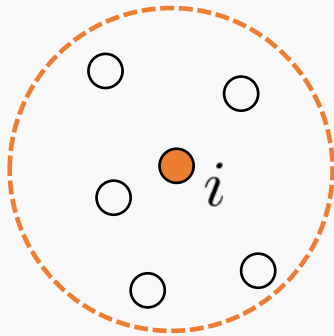
$$\nabla f(\mathbf{x}_i) = \sum_j^N \left(f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_i) \right) \nabla W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|; h) V_j + \mathcal{O}(h^0) \quad \blacktriangleright \quad \text{解像度を上げてても誤差は減らない}$$

【原因】 均等配置の仮定 ▶ 【対策】 均等配置を仮定しない (高次の項を考慮)

最小二乗法に基づく高精度粒子法を参考

- LSMPS [Tamai & Koshizuka, 2014]
- CPHSF [Yamamoto & Makino, 2017]

$$\begin{cases} f_i + \nabla f_i \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_i) + \dots = f_1 \\ f_i + \nabla f_i \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_i) + \dots = f_2 \\ \vdots \\ f_i + \nabla f_i \cdot (\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_i) + \dots = f_N \end{cases}$$



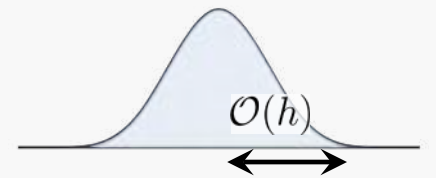
重み付き最小二乗法

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b} \quad \blacktriangleright \quad \mathbf{A}^\top \Psi \mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{A}^\top \Psi \mathbf{b}$$

- 距離に関する重み $\Psi = \text{diag}\{\psi_1 \cdots \psi_N\}$

$$\psi_j \propto \frac{\partial^\beta W(r_{ij}; h)}{\partial r_{ij}^\beta} V_j$$

カーネル関数 W

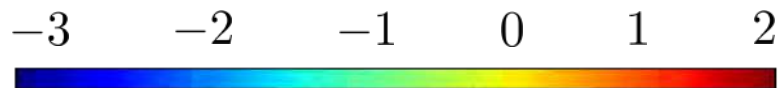


β 0以上の整数 V_j 粒子体積

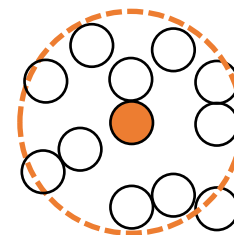
- 適切に選ぶことで従来のSPH法を再現
→ 一般化されたSPH法
- 任意の階数の微分を
任意の精度で求めることが可能

関数の再現計算【1/2】

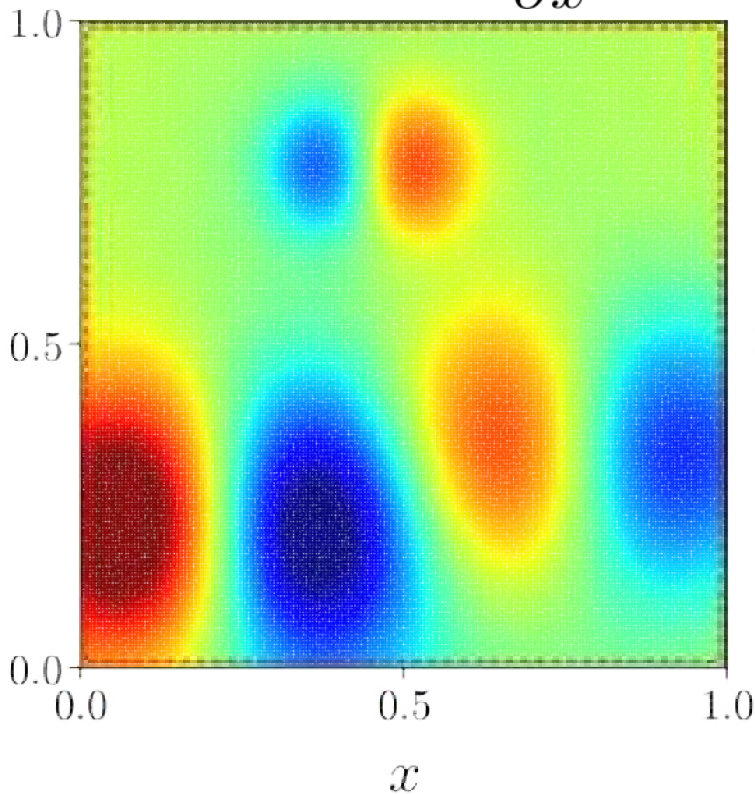
背景 > 課題 > 手法開発 > 検証①②③ > 妥当性確認 > まとめと今後



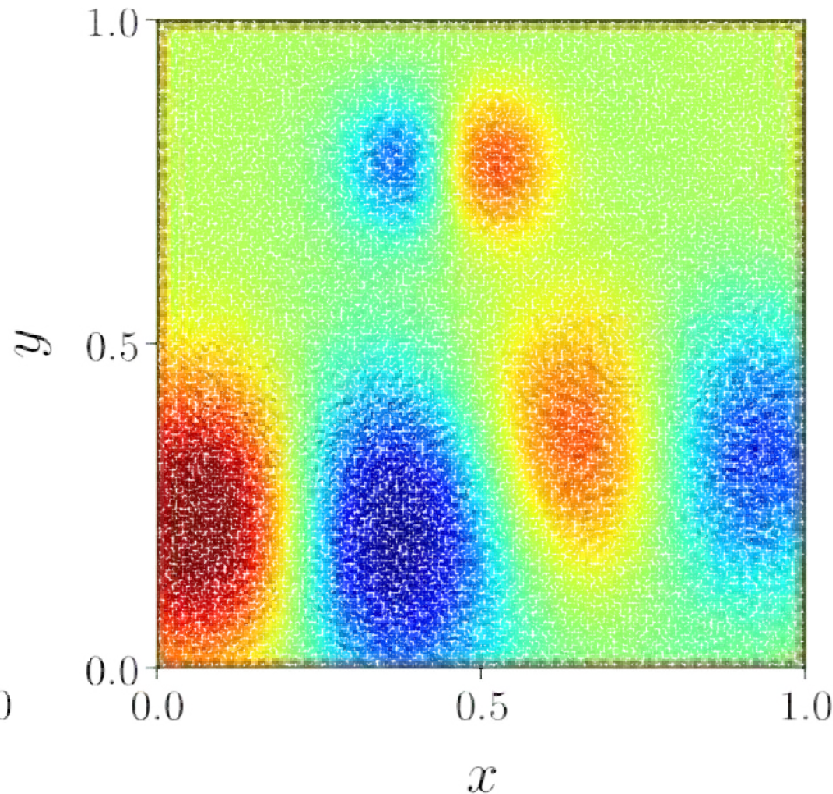
配置に乱れがある場合



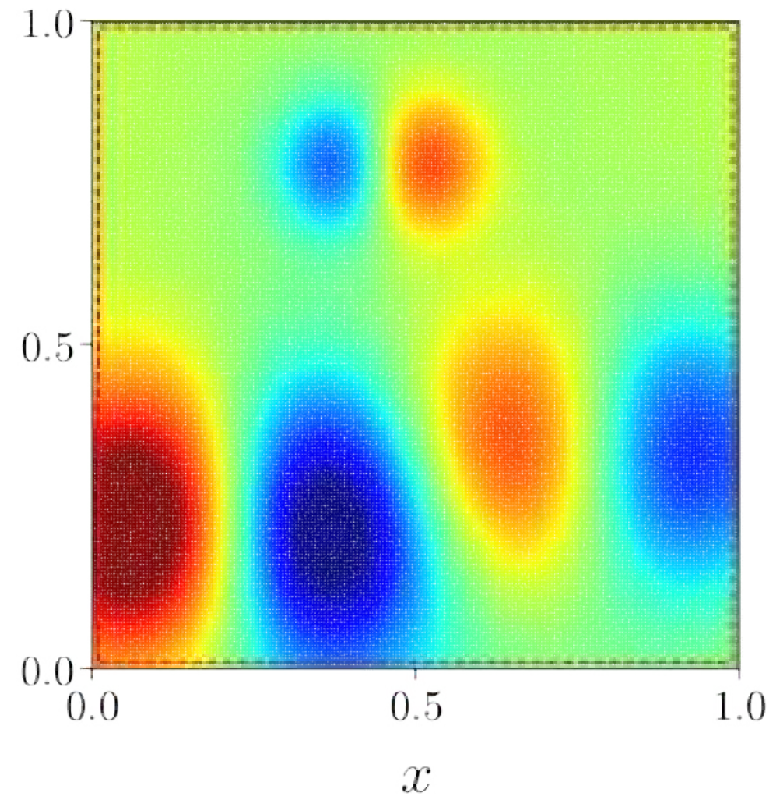
元の関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$



従来のSPH法

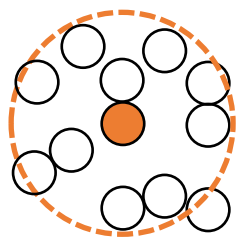


最小二乗SPH法

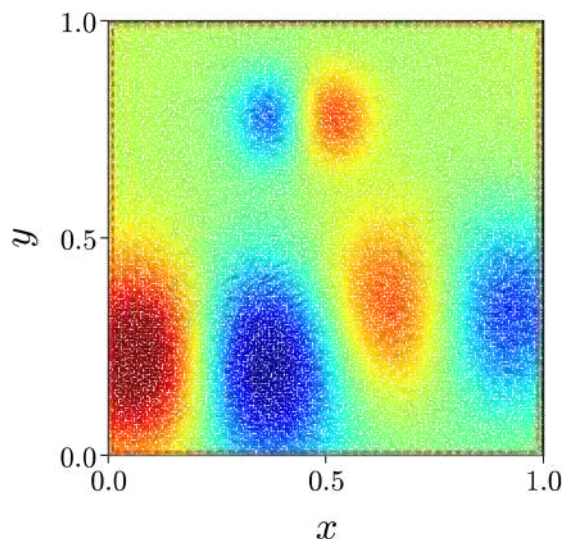


背景 > 課題 > 手法開発 > 検証①②③ > 妥当性確認 > まとめと今後

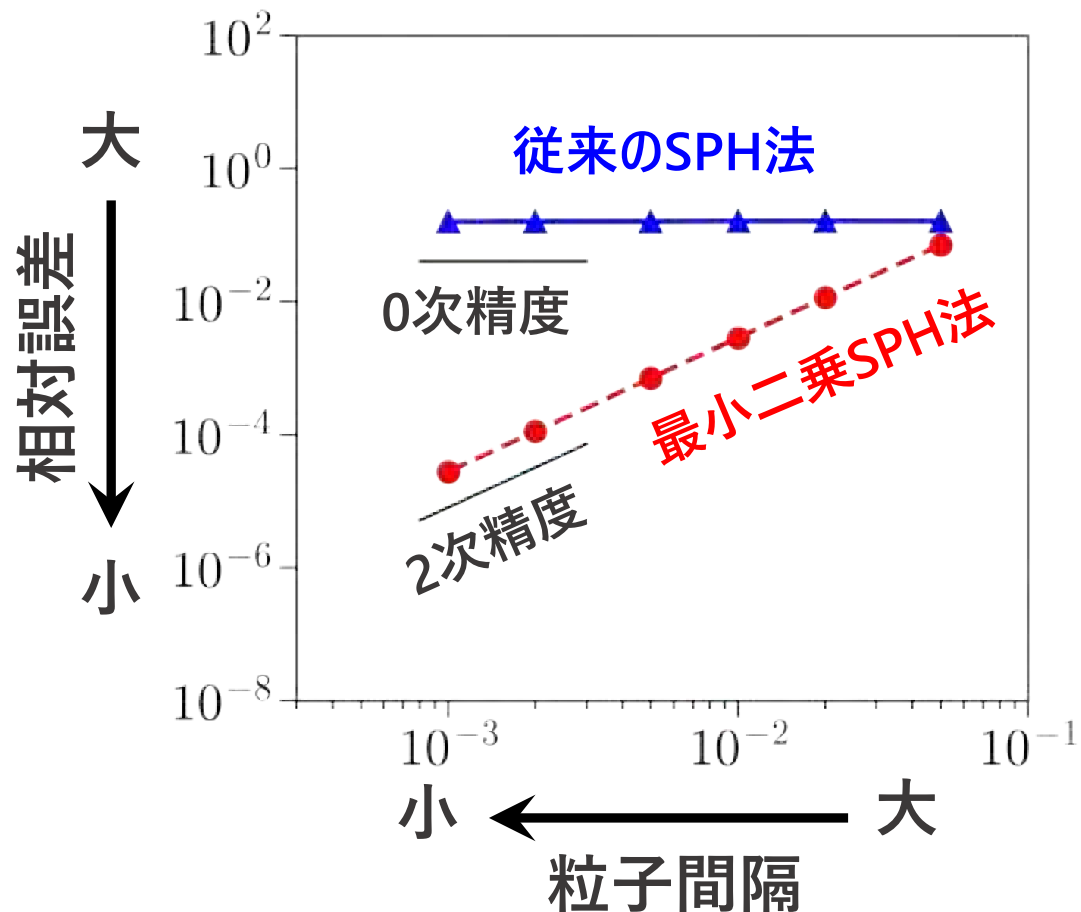
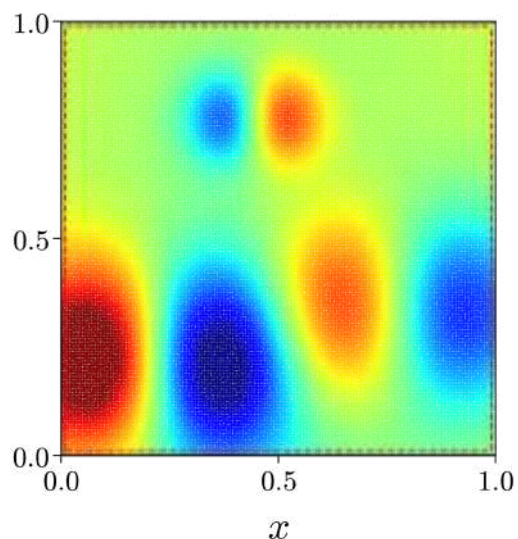
配置に乱れがある場合



従来のSPH法

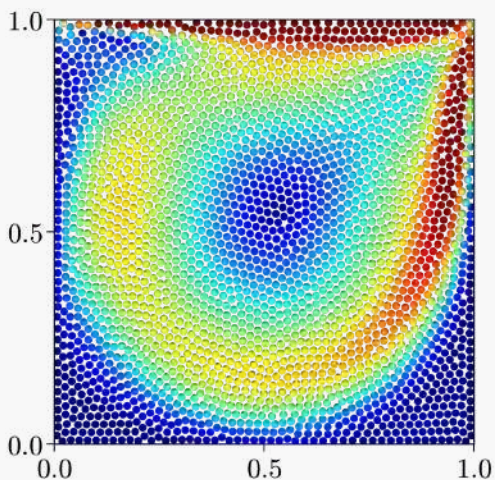


最小二乗SPH法



【結果】 従来のSPH法は0次精度 / 最小二乗SPH法は高精度

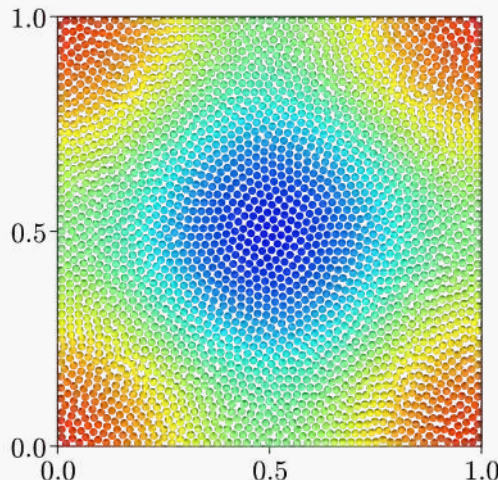
流体計算に関するベンチマークテスト(2次元)を実施 ▶ 従来法 vs 提案法



Cavity flow

Ghia et al. (1982)

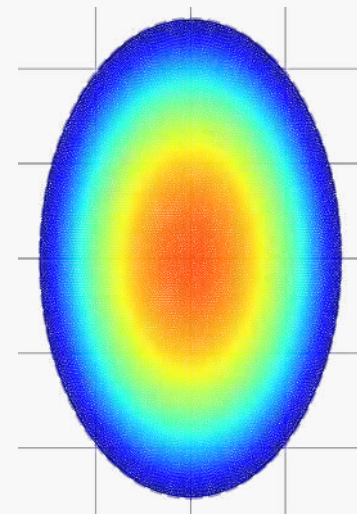
上壁に一定速度を与える問題
定常 (参照解と比較)



Taylor-Green vortex

Taylor and Green (1923)

粘性によって速度が減衰する問題
非定常 (厳密解と比較)



Oscillating drop

Monaghan and Rafiee (2013)

自由表面を有する問題
非定常 (準解析解と比較)

背景 > 課題 > 手法開発 > 検証①②③ > 妥当性確認 > まとめと今後

基礎方程式 (弱圧縮性近似を適用)

① 質量保存の式

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i$$

② 運動量保存の式

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} \langle \nabla p \rangle_i + \nu \langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i + \mathbf{F}_{\text{ext},i}$$

③ 状態方程式

Chorin (1967)

$$p_i = c_0^2 (\rho_i - \rho_0)$$

ρ 密度 t 時間 \mathbf{u} 速度 p 圧力 ν 動粘性率 $\mathbf{F}_{\text{ext},i}$ 外力 $c_0 = 10|\mathbf{u}|_{\text{max}}$ 人為的な音速

本当の流体はCFL条件が厳しい

$$\Delta t = \Delta x / c_0$$

遅い流れに対して

本質的でない音波を **低減** or **増大**

弱圧縮性近似 ●

CFL条件を緩める

音速 **低減**

音速 **増大**

● 本当の流体

● **非**圧縮性近似

CFL条件を除去 ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$)

弱圧縮性近似の利点: 高速な逐次計算が可能 (∵各粒子の時間発展式が独立)

背景 > 課題 > 手法開発 > 検証①②③ > 妥当性確認 > まとめと今後

◆ 基礎方程式 (弱圧縮性近似を適用)

1 質量保存の式
$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i$$

2 運動量保存の式
$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} \langle \nabla p \rangle_i + \nu \langle \nabla^2 \mathbf{u} \rangle_i + \mathbf{F}_{\text{ext},i}$$

3 状態方程式
$$p_i = c_0^2(\rho_i - \rho_0)$$

◆ SPHの微分モデル (従来法 SPH vs 提案法 LS-SPH)

従来SPH

$$\langle \nabla f \rangle_i = \sum_j^N (f_j - f_i) \nabla_i W_{ij} V_j$$
$$\langle \nabla^2 f \rangle_i = \sum_j^N (f_j - f_i) \frac{\mathbf{x}_{ji} \cdot \nabla_i W_{ij}}{r_{ij}} V_j$$

LS-SPH 1階微分: 2次精度 2階微分: 1次精度

◆ 安定化スキーム $A^T \Psi A X = A^T \Psi b$

1 Particle Shifting 法を適用 Lind et al. (2012)

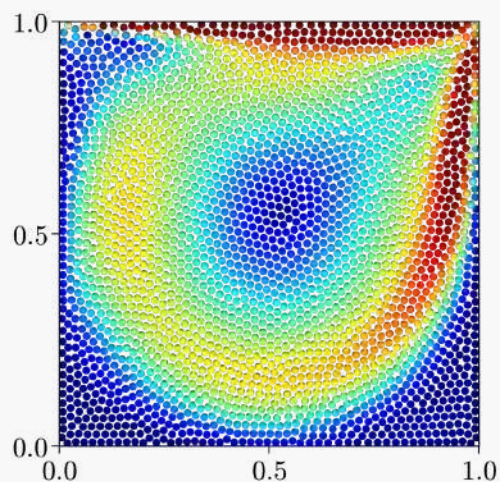


2 密度拡散項を導入 Antuono et al. (2010)

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i + \delta \langle \nabla^2 \rho \rangle_i$$

粒子法では境界条件の付与が困難
→ 境界付近で高周波な音波が発生
→ 高周波ノイズを拡散させて除去

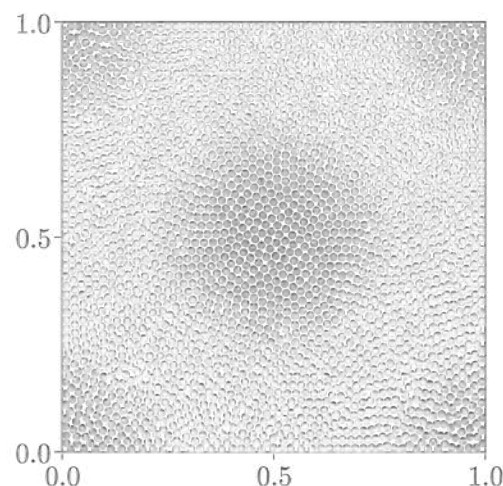
流体計算に関するベンチマークテスト(2次元)を実施 ▶ 従来法 vs 提案法



Cavity flow

Ghia et al. (1982)

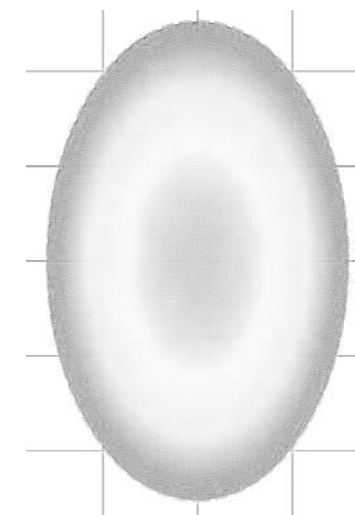
上壁に一定速度を与える問題
定常 (参照解と比較)



Taylor-Green vortex

Taylor and Green (1923)

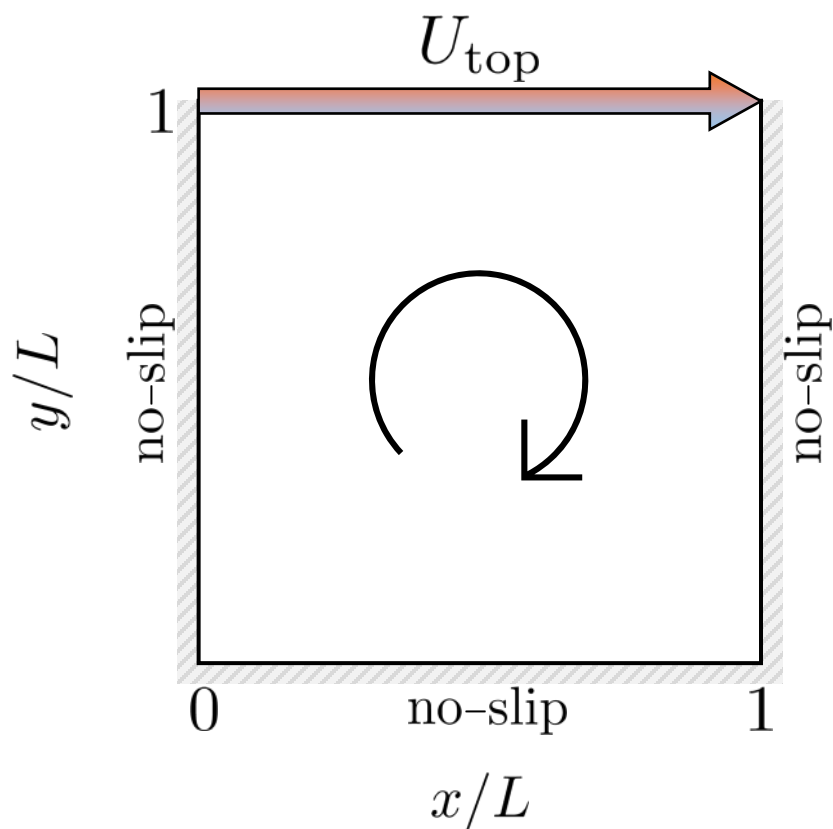
粘性によって速度が減衰する問題
非定常 (厳密解と比較)



Oscillating drop

Monaghan and Rafiee (2013)

自由表面を有する問題
非定常 (準解析解と比較)



- 基礎方程式（オリジナル） Ghia et al. (1982)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \blacktriangleright \quad \text{弱}$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i + \delta \langle \nabla^2 \rho \rangle_i$$

密度拡散項

$$p_i = c_0^2 (\rho_i - \rho_0)$$

- 無次元パラメータ: レイノルズ数

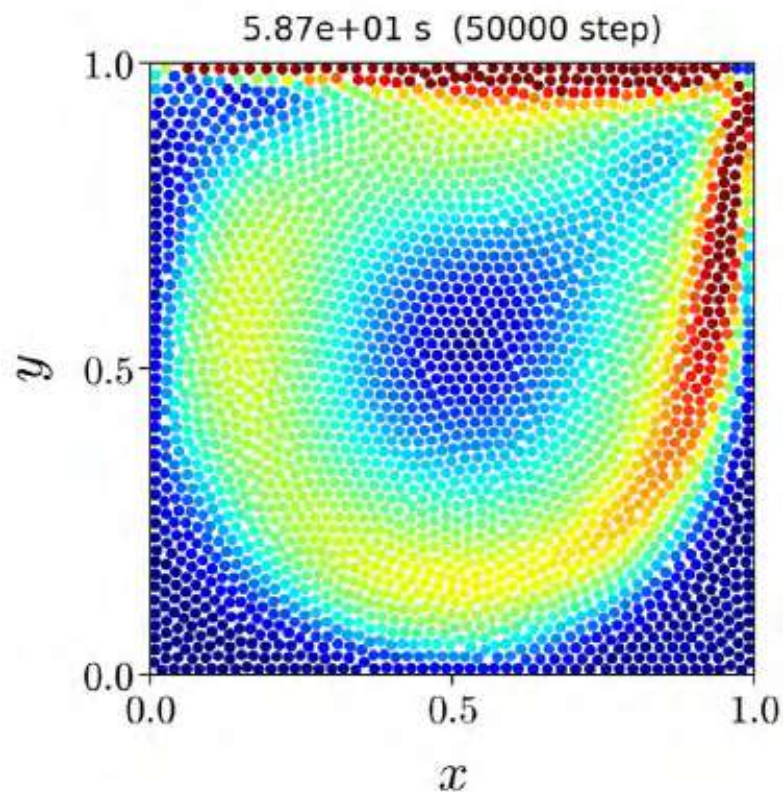
$$Re = \frac{LU_{\text{top}}}{\nu} = 1000$$

- 定常解が得られるまで計算

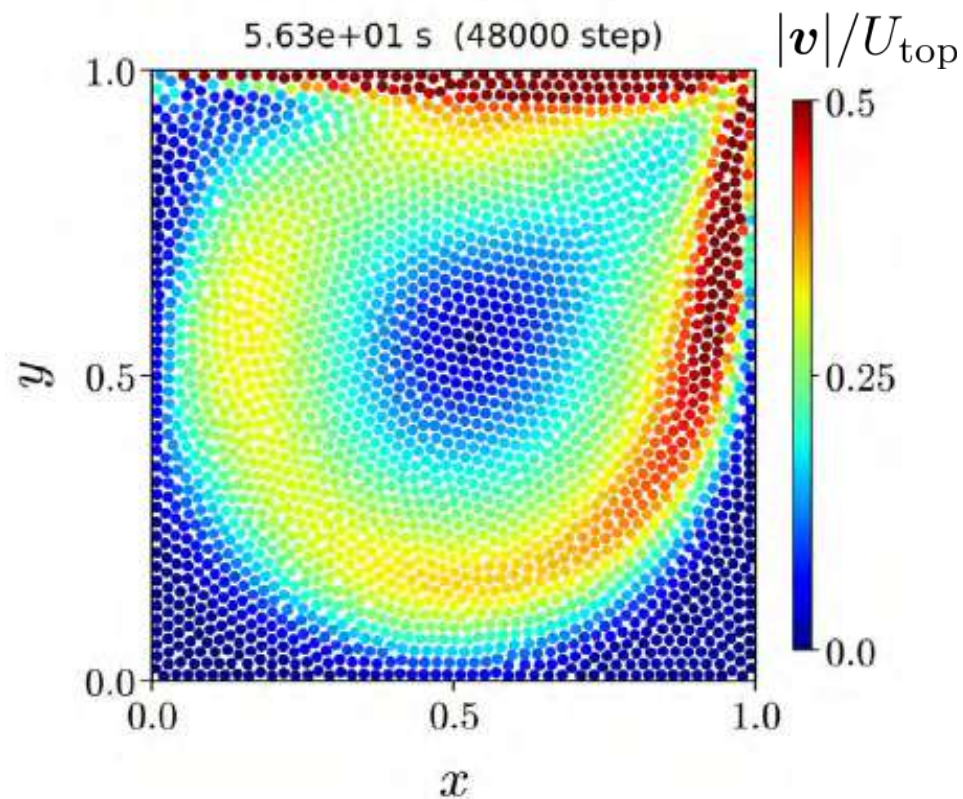
背景 > 課題 > 手法開発 > 検証①②③ > 妥当性確認 > まとめと今後

$$Re = 1000, N = 50 \times 50$$

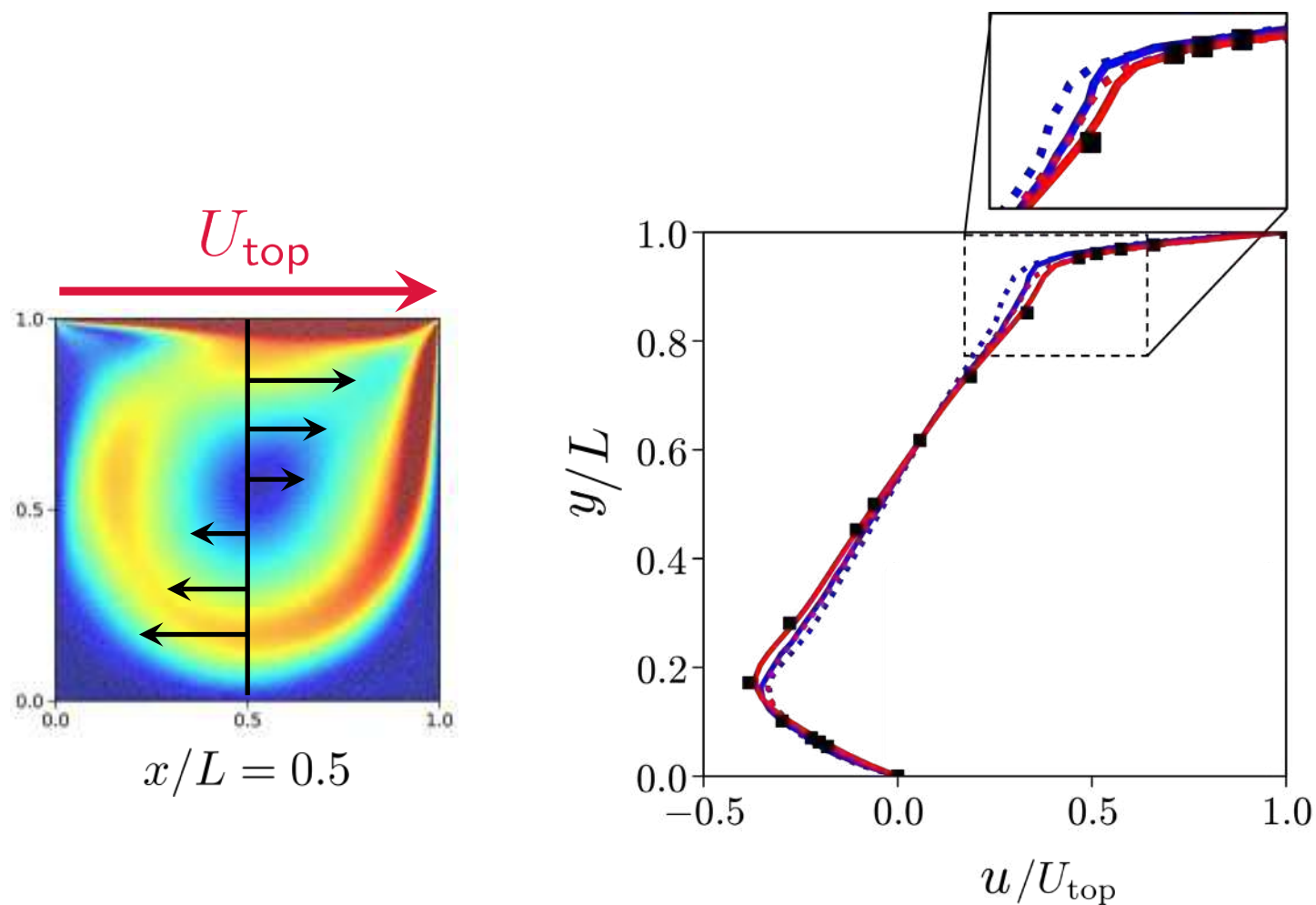
【従来SPH】



【LS-SPH】



定性的には両モデルでほとんど同じ

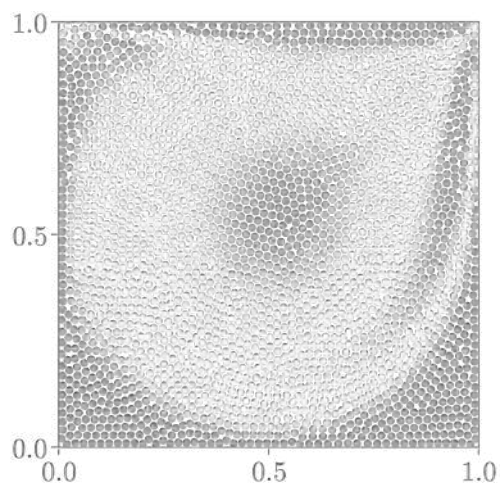


■ Ghia et al. (1982)
有限体積法

従来SPH	$N = 50 \times 50$
	————	$N = 200 \times 200$
LS-SPH	$N = 50 \times 50$
	————	$N = 200 \times 200$

【結果】 LS-SPHの方が精確 / 従来SPHはそれほど悪くない

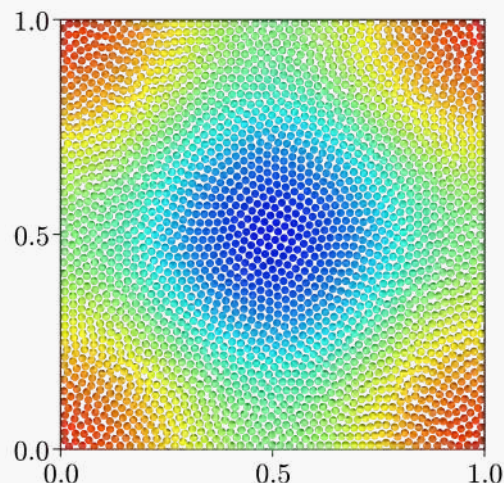
流体計算に関するベンチマークテスト(2次元)を実施 ▶ 従来法 vs 提案法



Cavity flow

Ghia et al. (1982)

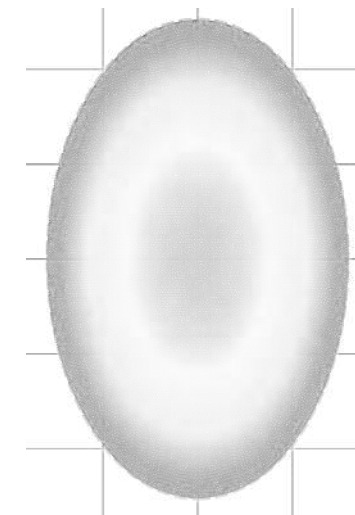
上壁に一定速度を与える問題
定常 (参照解と比較)



Taylor-Green vortex

Taylor and Green (1923)

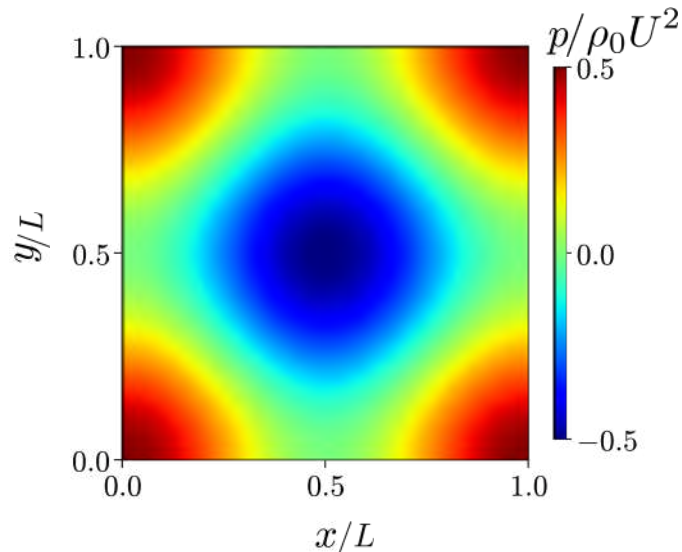
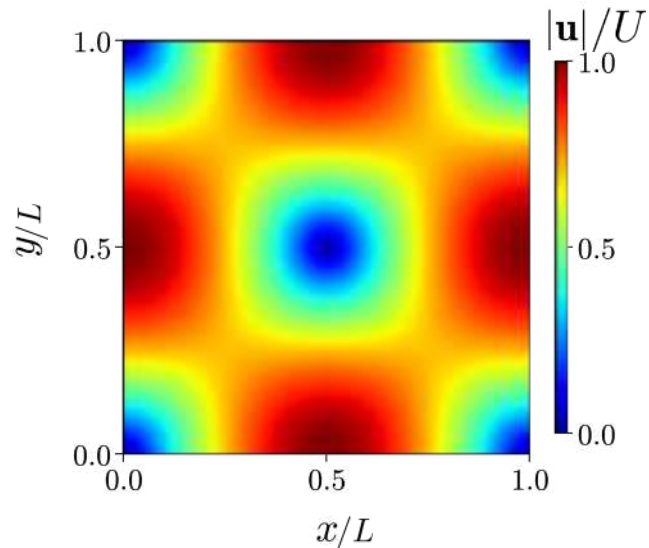
粘性によって速度が減衰する問題
非定常 (厳密解と比較)



Oscillating drop

Monaghan and Rafiee (2013)

自由表面を有する問題
非定常 (準解析解と比較)



■ 基礎方程式（オリジナル） Taylor and Green (1923)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \blacktriangleright \quad \text{弱}$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i \quad \text{密度拡散項なし}$$

$$p_i = c_0^2 (\rho_i - \rho_0)$$

■ 厳密解が存在（非圧縮 + Free-slip条件）

$$u(x, y, t) = U e^{-2\pi^2 \nu t / L^2} \sin(\pi x / L) \cos(\pi y / L)$$

$$v(x, y, t) = -U e^{-2\pi^2 \nu t / L^2} \cos(\pi x / L) \sin(\pi y / L)$$

$$p(x, y, t) = \frac{\rho_0 U^2}{4} e^{-4\pi^2 \nu t / L^2} [\cos(2\pi x / L) + \cos(2\pi y / L)]$$

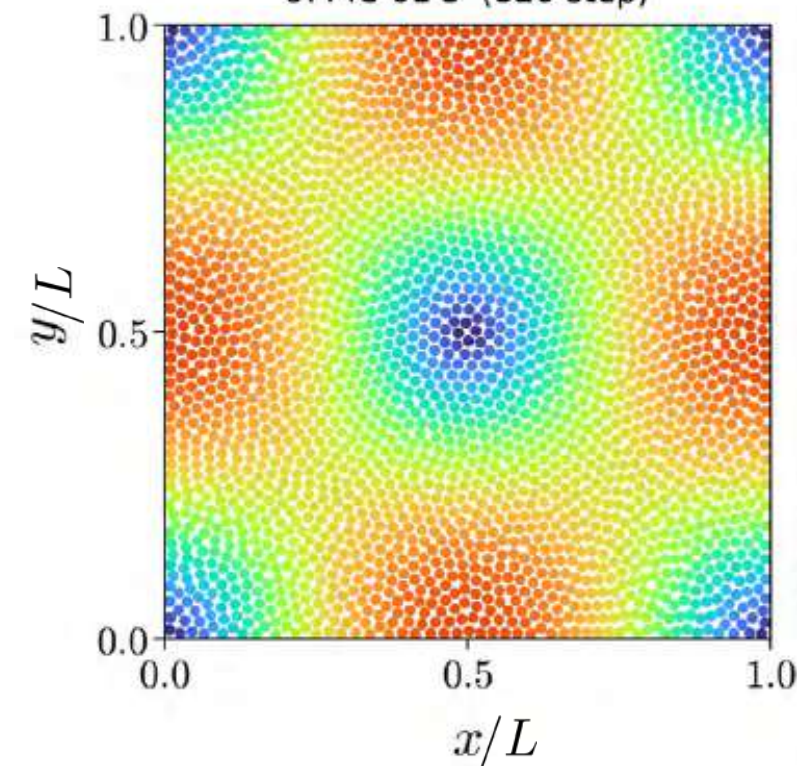
■ 無次元パラメータ: レイノルズ数 $Re = \frac{LU}{\nu}$

背景 > 課題 > 手法開発 > 検証①②③ > 妥当性確認 > まとめと今後

$$Re = 100, N = 50 \times 50$$

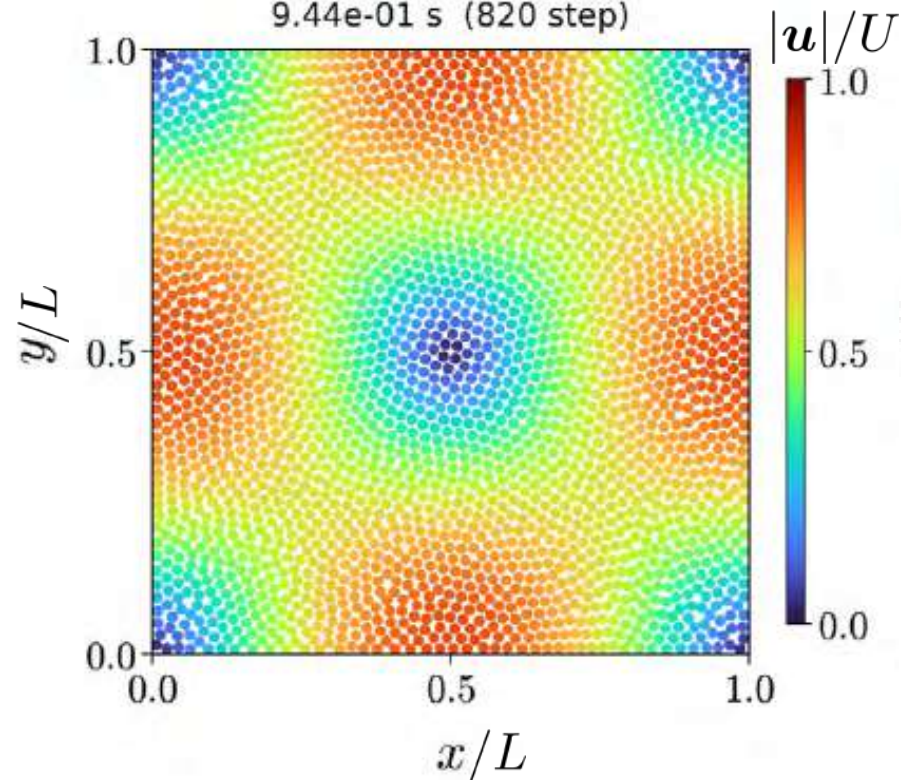
【従来SPH】

9.44e-01 s (820 step)



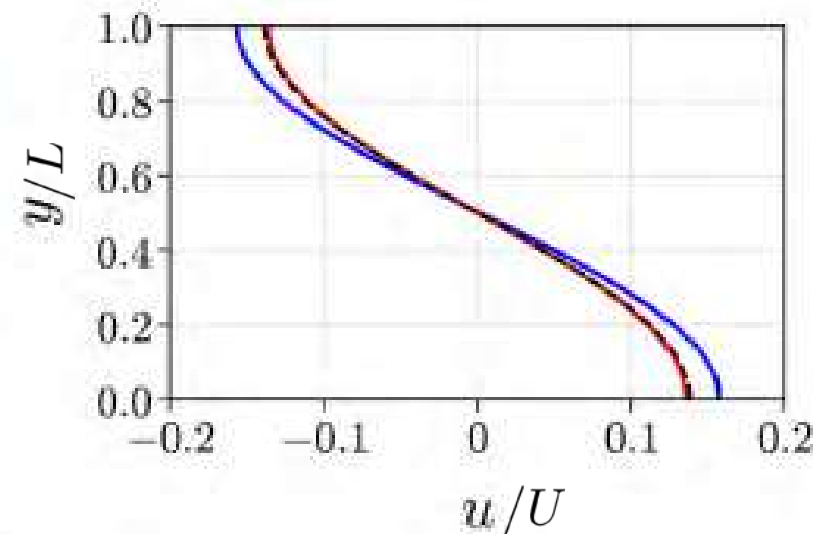
【LS-SPH】

9.44e-01 s (820 step)



【速度プロファイル】

$t/(L/U) = 10, x/L = 0.5$

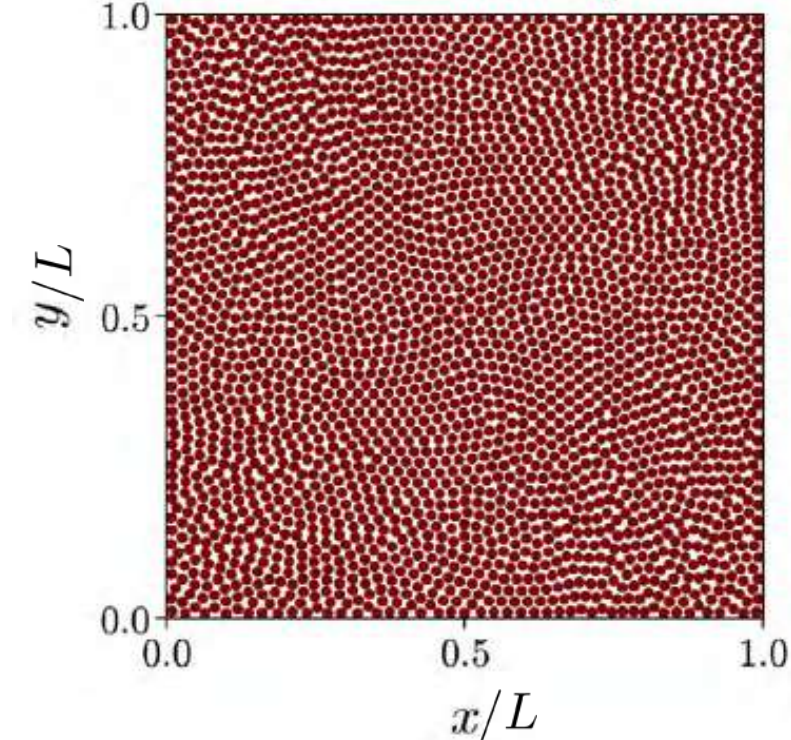


⋯ 厳密解 — 従来SPH — LS-SPH

$$Re = 100, N = 50 \times 50$$

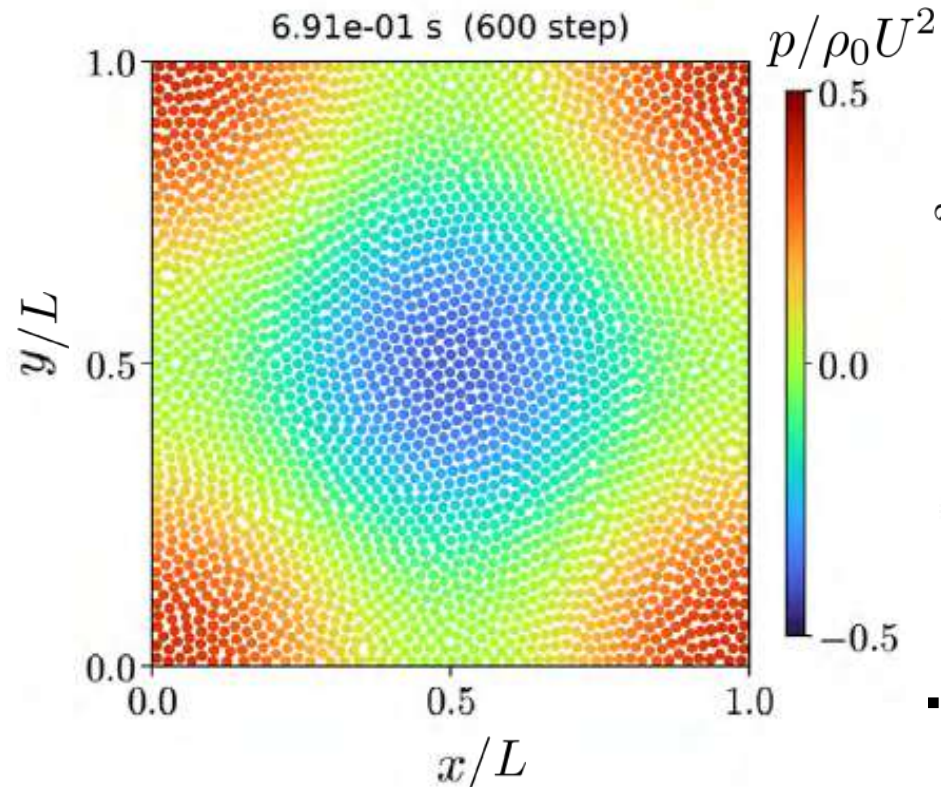
【従来SPH】

6.91e-01 s (600 step)

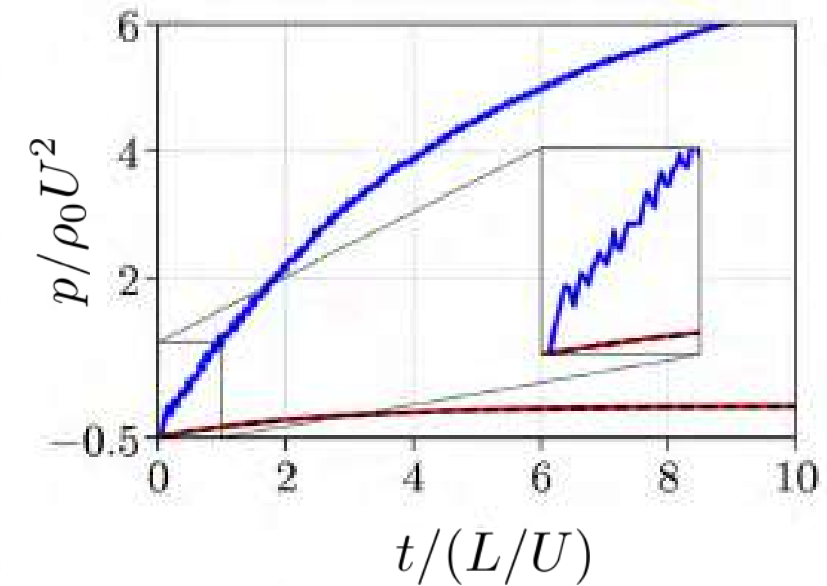


【LS-SPH】

6.91e-01 s (600 step)



【圧力の時間変化】

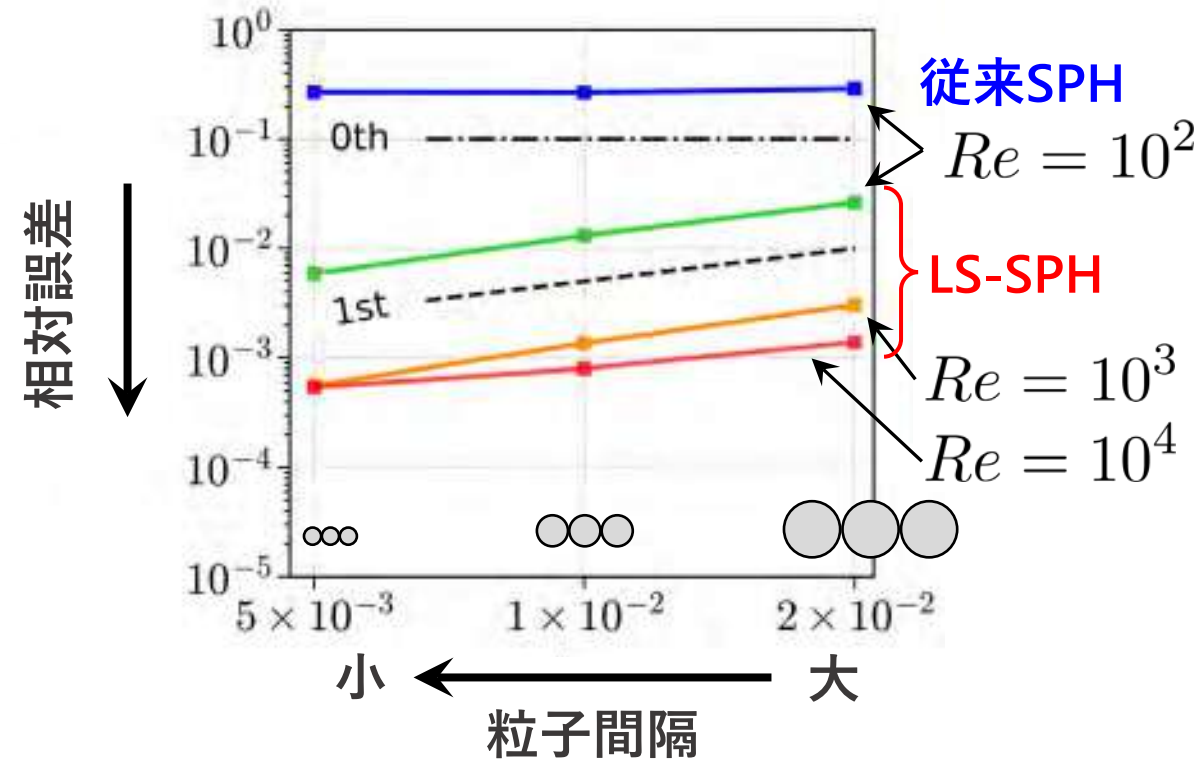
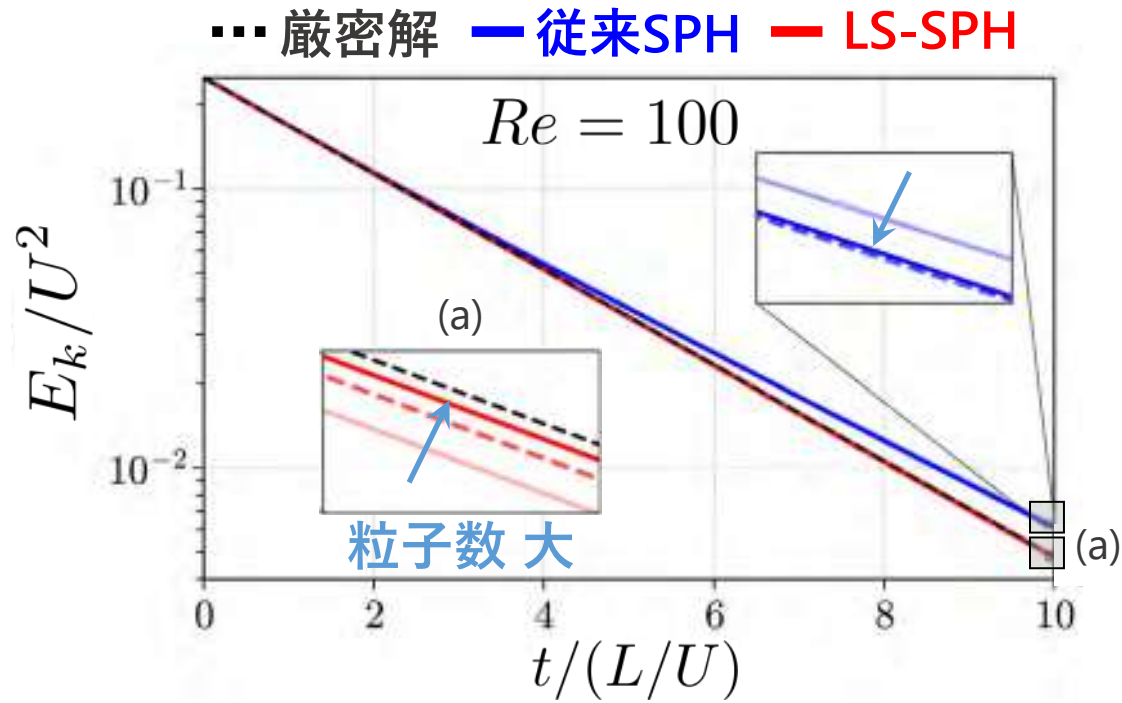
@ $(x/L, y/L) = (0.5, 0.5)$ 

... 厳密解 — 従来SPH — LS-SPH

運動エネルギーの保存性を確認

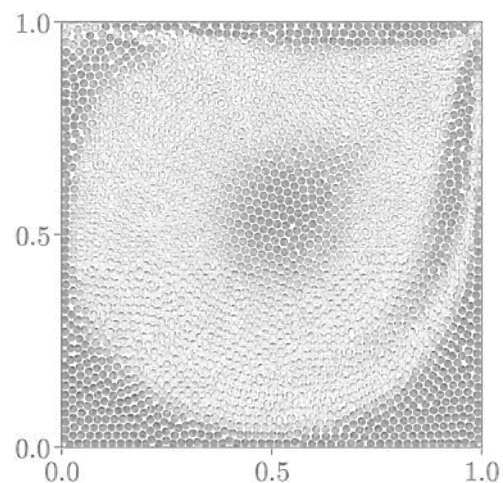
$N = 50 \times 50, 100 \times 100, 200 \times 200$

$$\text{系の運動エネルギー } E_k = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N |\mathbf{u}_i|^2$$



【結果】 従来SPHは0次精度 / LS-SPHは~1次精度

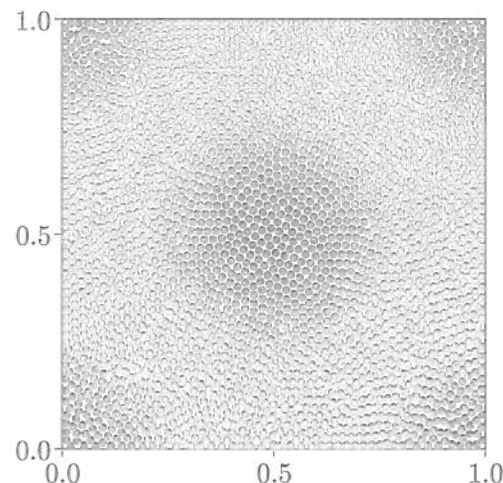
流体計算に関するベンチマークテスト(2次元)を実施 ▶ 従来法 vs 提案法



Cavity flow

Ghia et al. (1982)

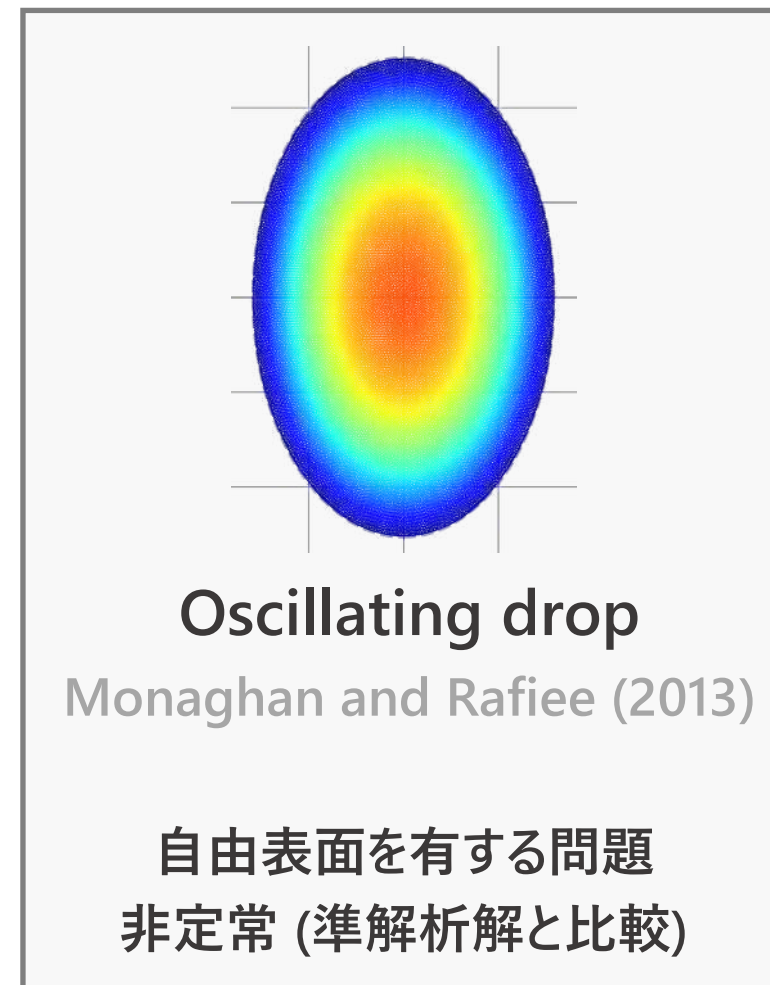
上壁に一定速度を与える問題
定常 (参照解と比較)



Taylor-Green vortex

Taylor and Green (1923)

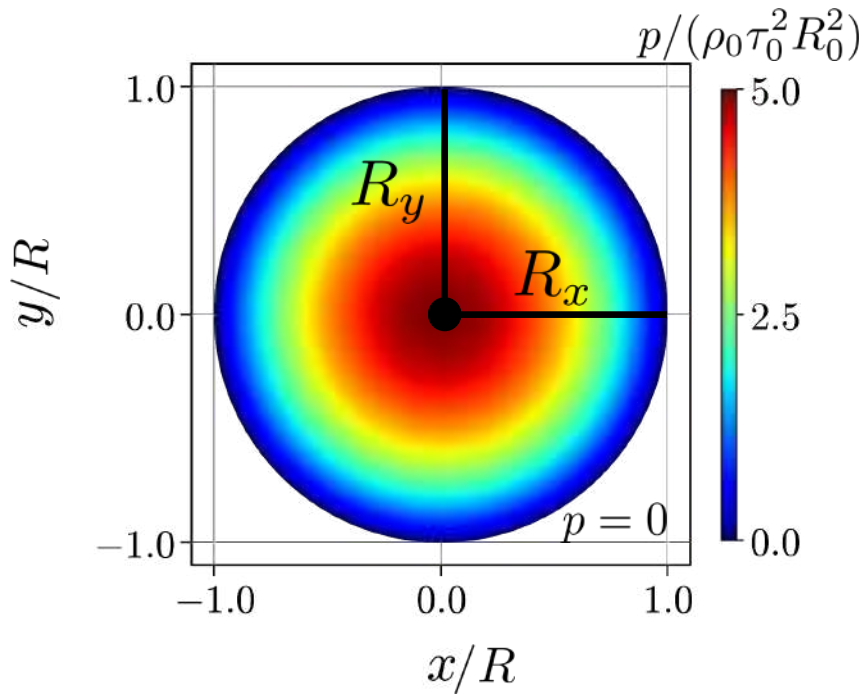
粘性によって速度が減衰する問題
非定常 (厳密解と比較)



Oscillating drop

Monaghan and Rafiee (2013)

自由表面を有する問題
非定常 (準解析解と比較)



■ 基礎方程式 Monaghan and Rafiee (2013)

中心力 ▶ ポテンシャルが存在

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \omega^2 \mathbf{x}_i$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{▶ 弱}$$

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_i + \delta \langle \nabla^2 \rho \rangle_i$$

密度拡散項

$$p_i = c_0^2 (\rho_i - \rho_0)$$

■ 非圧縮かつ非粘性の場合に準解析解が存在

$$u(x, y, t) = \tau x \quad v(x, y, t) = -\tau y \quad \frac{d\tau(t)}{dt} = (\tau^2 + \omega^2) \frac{R_y^2 - R_x^2}{R_y^2 + R_x^2}$$

$$p(x, y, t) = \frac{\rho_0}{2} (\tau^2 + \omega^2) (R^2 - (x^2 + y^2))$$

■ パラメータ Khayyer et al. (2017)

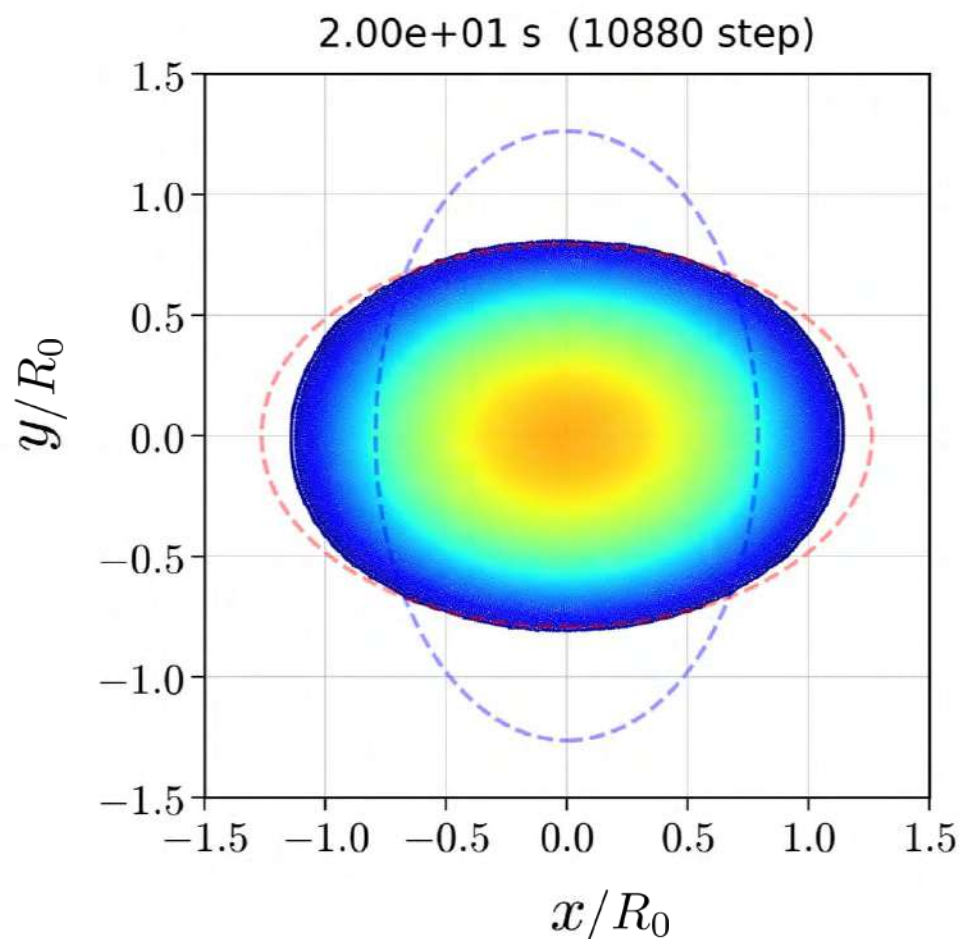
小さい粘性を導入

$$R_0 = 0.5 \text{ m} \quad \omega = 1.2 \text{ s}^{-1} \quad \tau = 0.4 \text{ s}^{-1} \quad \rho_0 = 1.0 \text{ kg m}^{-3} \quad \nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

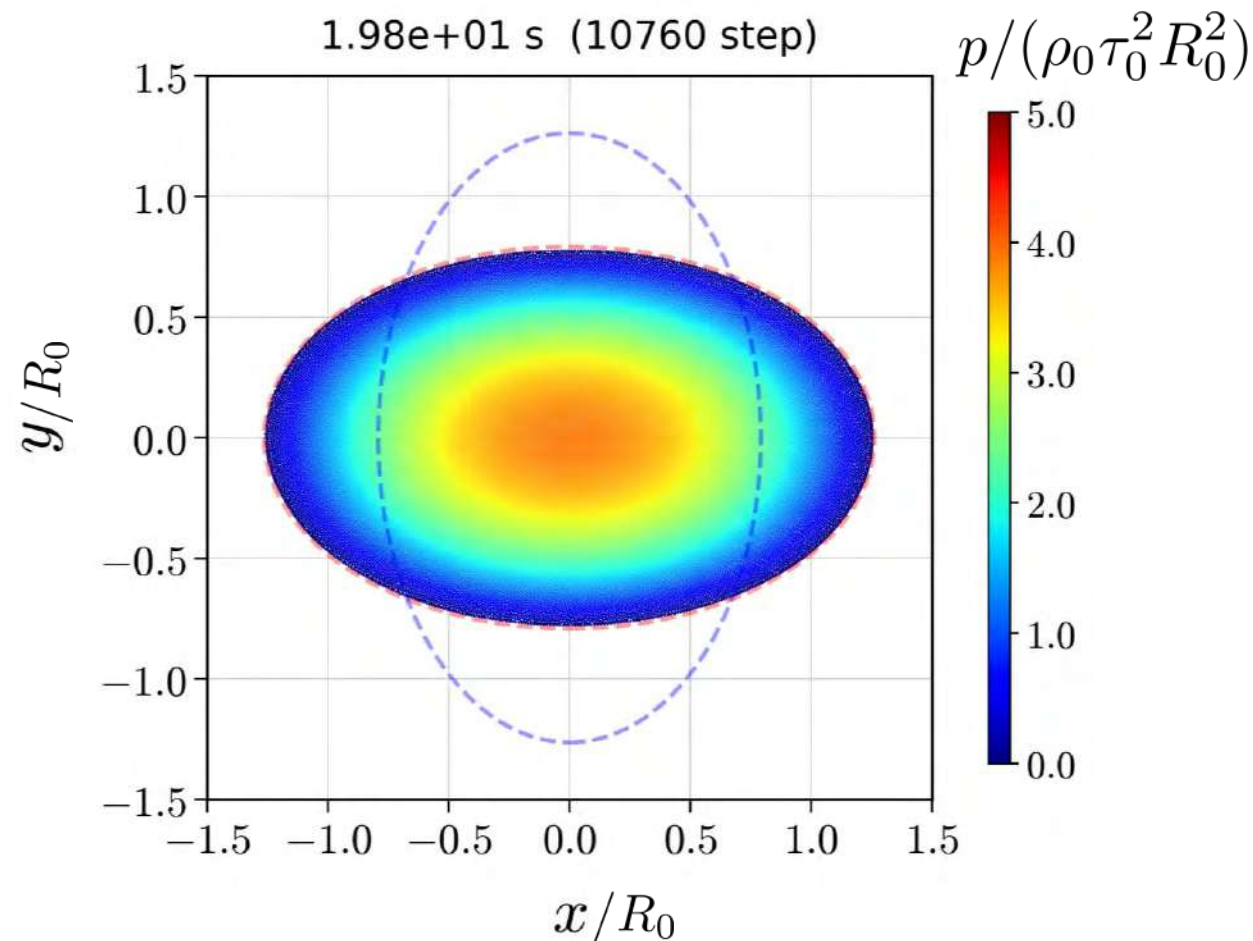
背景 > 課題 > 手法開発 > 検証①②③ > 妥当性確認 > まとめと今後

$R_0/\Delta x = 100 \leftarrow$ 半径方向に100粒子

【従来SPH】



【LS-SPH】

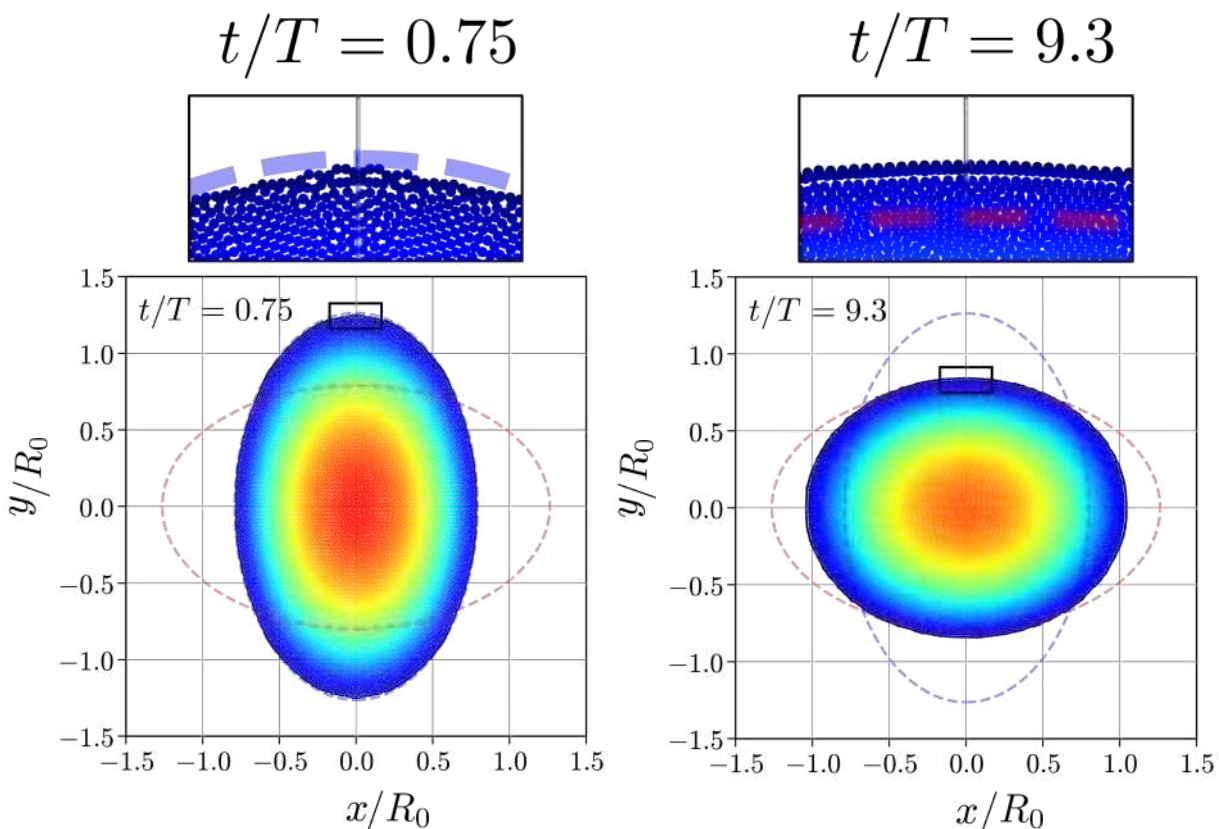


Oscillating drop 【結果 2/3】

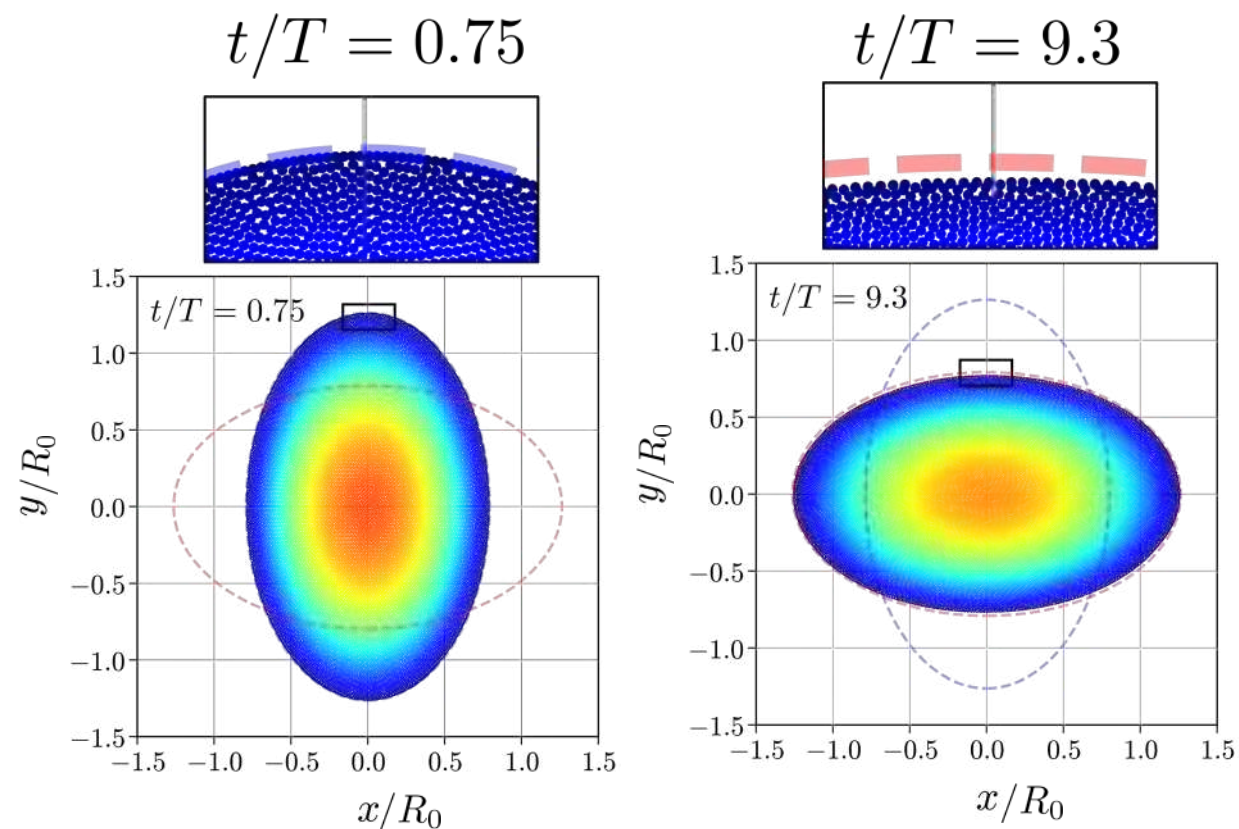
背景 > 課題 > 手法開発 > 検証①②③ > 妥当性確認 > まとめと今後

0.0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 $p/(\rho_0\tau_0^2R_0^2)$

$$T \approx \sqrt{2}\pi/\omega$$



【従来SPH】



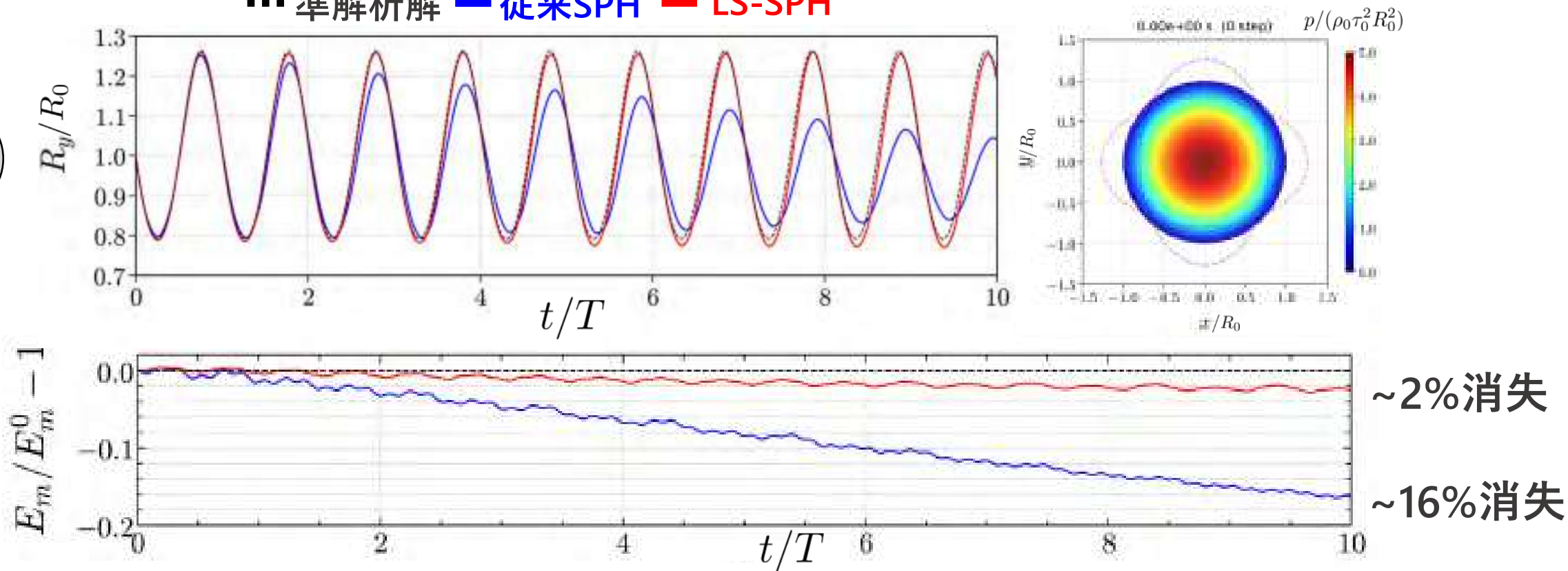
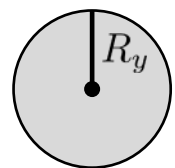
【LS-SPH】

従来SPHは全く異なる解 / LS-SPHは準解析解と整合的

背景 > 課題 > 手法開発 > 検証①②③ > 妥当性確認 > まとめと今後

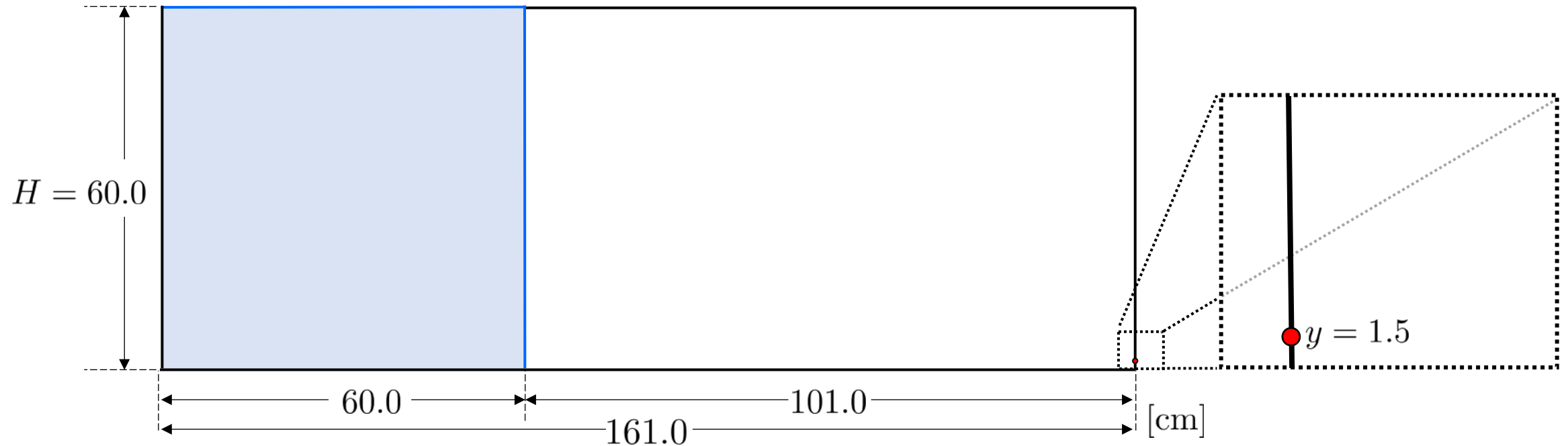
軸と力学的エネルギーの時間変化

⋯ 準解析解 — 従来SPH — LS-SPH

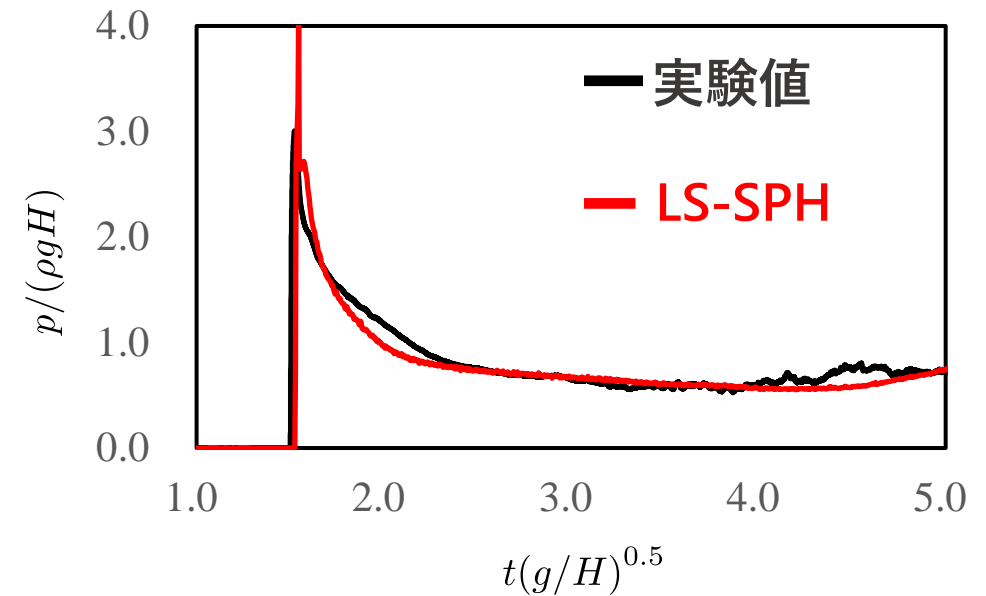
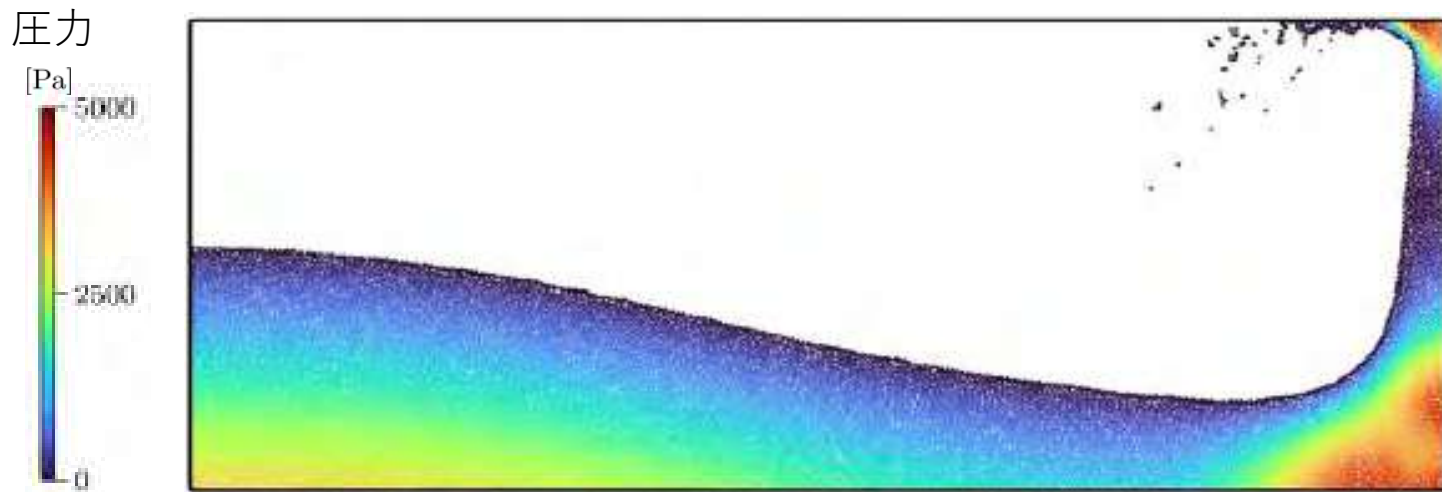


【結果】 従来SPHはどんどん減衰する / LS-SPHは準解析解と整合的

流体計算に関する妥当性確認（実験との比較）を実施 ▶ **提案法**



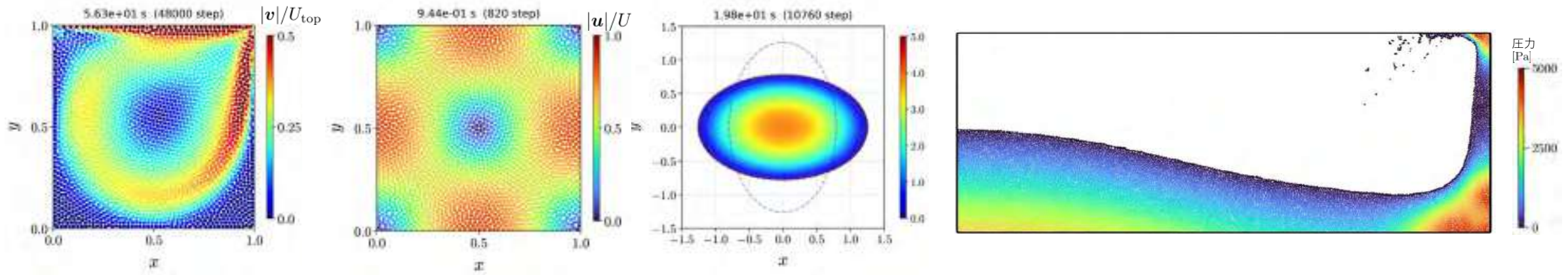
Dam-break problem
Lobovský et al. (2014)



【結果】 LS-SPHは実験値と整合的，激しい流れでも安定して解析可能

まとめ

従来のSPH法は精度が低い ▶ 高精度な**最小二乗SPH法**を開発し精度向上



今後の共同研究

巨大地震および津波被害の減災を目指した応用研究に着手したい